

文章编号: 1000-8055(2007)09-1461-07

轴流压气机过失速的非线性动力学分析

陈 策^{1,2,3}, 聂超群¹, 李 军⁴

(1. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100080;

2 中国科学院 研究生院, 北京 100039;

3 北京航空工程技术研究中心, 北京 100076;

4 空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘 要: 为了解 Greitzer 的 B 参数和节流 γ 参数对轴流压气机过失速行为的影响, 使用分叉分析方法, 研究了压缩系统中过失速所对应的静态分叉行为. 由此, 划分了 γ - B 分叉参数空间中, 轴流压缩系统稳定和 unstable 流动的区域分布图. 结果表明, 非线性动力学的分叉分析方法, 可以准确的捕捉到轴流压缩系统中典型的过失速流动行为, 同时可以简便的分析分叉参数作用下平衡点稳定性的变化情况.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 轴流压气机; 过失速; 非线性动力学

中图分类号: V231.3

文献标识码: A

Nonlinear dynamic analysis on post-stall transients of axial-flow compressor

CHEN Ce^{1,2,3}, NIE Chao-qun¹, LI Jun⁴

(1. Institute of Engineering Thermo Physics,
Chinese Academy of Sciences Beijing 100080;

2 Graduate School, Chinese Academy of Sciences Beijing 100039;

3 Beijing Aeronautical Technique Research Center Beijing 100076)

4 The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038)

Abstract: To study the effect of Greitzer B parameter and throttle parameter γ on post-stall behavior of axial flow compressor, the static bifurcation behavior for post-stall of axial flow compressor was analyzed using bifurcation analysis method. In the γ - B bifurcation parameter space, the sketch map for steady and unsteady flow of compressor was plotted out. It is thus concluded that nonlinear bifurcation analysis can accurately capture typical post-stall transients and easily analyze the change of stability of system equilibriums under bifurcation parameters.

Key words: aerospace propulsion system; axial-flow compressor; post-stall; nonlinear dynamics

轴流压气机过失速流动模型的发展经历了从线性到非线性、从压气机部件到压缩系统的一个过程. 目前广泛使用的 Moore-Greitzer 非线性压

缩系统模型^[1], 是非线性状态空间模型, 这个模型通过系统的分叉行为捕捉到了压缩系统的非线性动力特性, 并将经典的非线性动力系统理论应用

收稿日期: 2006-08-24; 修订日期: 2006-11-28

作者简介: 陈策(1979), 男, 山东济南人, 北京航空工程研究中心工程师, 中国科学院工程热物理所博士生, 主要从事推进系统原理与控制的研究.

于旋转失速和喘振的动力学特性分析. 针对这个模型, 国内外研究人员已经开展了相当多的研究工作, Mccaughan^[2] 从微分方程和动力系统角度分析了 B 参数对不稳定行为的影响, 认为 B 参数是压缩系统过失速行为的决定因素. Abed 和 Liaw^[3,4] 采用二阶 Moore-Greitzer 的集总参数模型分析了基于 B 参数的压缩系统状态方程局部非线性行为. Agarwal^[5] 分析了 B 参数作用下, 压缩系统的分叉行为和喘振极限环的问题. 这些研究不但加深了我们对于过失速行为机理的认识, 也开辟了流动行为和主动控制研究的新路. 但是由于压气机特性线基本假设和二元模型的局限, 在二元压缩系统模型的基础上, 依靠三次多项式近似得到的压气机特性线方程, 无法观察到静态分叉的存在^[6]. 解决这一问题的方法有两种: 一是使用三阶的 Moore-Greitzer 模型; 二是使用更高次 (高于 3 次) 的多项式来近似表示特性线方程. 我们希望通过三阶 MG 模型所描述的压气机轴向不对称流动行为, 能够反映出动力系统静态分叉的行为. 因此本文根据三阶 Moore-Greitzer 模型, 对过失速行为进行非线性分析, 从系统动力学角度深入了解旋转失速和喘振的发生机制, 为主动控制提供理论依据.

1 轴流压缩系统过失速行为的非线性分析

1.1 非线性系统特性

一个非线性系统可以这样表示: $\dot{x} = f(x)$, x 为状态向量. 平衡点是指系统状态不再变化的点, 即满足 $\dot{x} = 0$ 的点. 一个线性系统, 一般只有一个平衡点. 非线性系统往往含有一个以上的平衡点. 极限环和分叉是非线性系统特有的两种行为.

极限环 (Limit cycles) 是指非线性系统能够在没有外部激励的情况下产生固定的幅值和固定周期的振荡.

当非线性系统的参数发生变化时, 其平衡点的稳定性可能发生变化, 而且平衡点的数量也可能发生变化. 这些使系统运动品质发生变化的参数值, 称为临界值或是分叉值. 这种分叉 (Bifurcation) 现象, 也就是参数的量变导致系统特性的质变的现象.

定义 1 (静态分叉、动态分叉)^[7]

设 $x \in D \subset X = R^n$, $\mu \in B \subset \Theta \subseteq R^m$, 方程 $\dot{x} = f(x, \mu)$ 的平衡点的数目随着参数 μ 的变化问

题称为静态分叉问题; 而 $\dot{x} = f(x, \mu)$ 的向量场或流 (特别是极限集) 的拓扑问题随着参数的变化问题称之为动态分叉问题

事实上静态分叉是只有平衡点的数目和稳定性发生变化的分叉问题, 即研究静态方程 $f(x, \mu) = 0$ 的解的数目和稳定性随着参数 μ 变化而出现的突然改变, 后面将要谈到将在本文中出现的几种静态分叉: 鞍点分叉 (Saddle node bifurcation)、跨临界分叉 (Trans critical bifurcation) 和叉形分叉 (Pitchfork bifurcation).

动态分叉是指除了静态分叉以外的其他分叉问题. Hopf 分叉、闭轨分叉、环面分叉、同宿或异宿分叉等等, 都属于动态分叉.

1.2 基于 MG 模型的非线性分叉分析

1986 年, Moore 和 Greitzer 联合提出了描述压缩系统失速动态性能的旋转失速和喘振的统一模型, 即 MG 模型^[8]

$$\dot{\Psi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[\frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} \Phi^r(\Psi) \right] \frac{H}{l_c} \tag{1}$$

$$\dot{\Phi} = \left[-\frac{\Psi - \Psi_0}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi}{W} - 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} R \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} \tag{2}$$

$$\dot{R} = R \cdot \left[1 - \left(\frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} R \right] \frac{3aH}{(1 + ma)W} \tag{3}$$

令节流特性线 $\Phi^r(\Psi) = \gamma_T \sqrt{\Psi}$, γ_T 为节流增益. 在实际试验中, 通过调整压缩系统后部的节流阀来加入对压气机的扰动, 当这个扰动作用于压气机时, 它的流动过程就会发生变化, 偏离原来的准稳定流动状态, 而可能进入过失速流动. 在计算仿真中, 原来的准稳定流动用压缩系统的特性曲线 Ψ 来表示, 而节流阀的影响用节流特性线 $\Phi^r(\Psi)$ 表示, 节流参数 γ 表示节流阀的开度, 如图 1 所示. 这两条曲线的交点作为仿真的起始点, 这个交点可以计算出来, 只要在此基础上加入一个小扰动, 就可以仿真出此扰动后流动的全过程.

根据上面的模型 (1) ~ (3), 如果作以下的变换: $\psi = \Psi/H$, $\phi = \Phi/W - 1$, $\psi_0 = \Psi_0/H$, 且 $H = 1$, 可以得到以下的简化模型:

$$\dot{\psi} = -\psi + \psi_0 - \phi - 3\phi R \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = [\phi - \phi^r(\psi)]/\beta^2 \tag{5}$$

$$\dot{R} = R(1 - r - \phi) \tag{6}$$

$R = 0$ 表示轴对称的流动行为, 而 $R \neq 0$ 代表了轴不对称即旋转失速下的流动行为. $\Psi_c(\Phi)$ 是压气机稳态的特性线. 假定具有以下形式

$$\Psi_c(\Phi) = \Psi_0 + 1.5\Phi - 0.5\Phi^3 \tag{7}$$

Ψ_0 是系统的关闭压头(Shut off head), 与压气机的级数成正比. 通过节流阀的压升系数这样表示

$$\Psi = \frac{1}{\gamma}(\Phi^\sigma + 1)^2 \tag{8}$$

β 组合了系统的几何参数和 B 参数, 它等于: $\beta = 2B\sqrt{\epsilon}$. B 参数实际上可以代表压气机转速, ϵ 是压缩系统的几何长度. σ 主要与压气机管道的惯性长度有关. 在计算中, 令 $\Psi_0 = 0.71875$, $\beta = 0.75$, $\sigma = 4$.

旋转失速特性主要从公式(4)~(6)中得到, 对于公式(6)来讲, 有两组静态解, 一是 $R = 0$, 二是 $R = 1 - \Phi^2$, 如果 $R = 0$, 方程(6)中, $\dot{R} = 0$, 这个方程就不再需要了, 整个系统变为

$$\dot{\Phi} = -\Psi + \Psi_c(\Phi) \tag{9}$$

$$\dot{\Psi} = [\Phi - \Phi^3(\Psi)]/\beta^2 \tag{10}$$

$R = 1 - \Phi^2$ 时, 代表轴不对称的情况. 把 $R = 1 - \Phi^2$ 带入公式(4), 平衡点上压升系数应当满足 $\Psi_s = \Psi_c(\Phi) - 3\Phi(1 - \Phi^2)$, 它代表了旋转失速的特性线. 可以看出旋转失速特性线的阶次取决于压气机特性线的阶次. 由于压气机特性线为 3 次特性线, 所以旋转失速特性线的最高阶次是三阶. 压气机特性线和旋转失速特性线如图 1 所示.

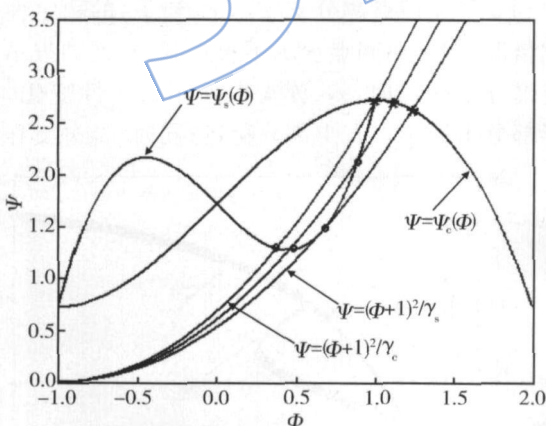


图 1 压气机稳态特性线、旋转失速特性线和节流线
Fig 1 Compressor steady-state, rotation stall and throttle characteristic

图 1 中 $\Psi = \Psi_c(\Phi)$ 是压气机稳态特性线, 节流线与它的交点表示轴对称的流动平衡点, 图中用星号表示. $\Psi = \Psi_s(\Phi)$ 是旋转失速的特性线. 由 $R = 1 - \Phi^2$, 当 $\Phi > 1$ 时, $R < 0$, 没有物理意义,

所以旋转失速特性线的定义域是流量系数 $\Phi \leq 1$ 的部分, 节流线与旋转失速特性线的交点代表轴不对称的流动平衡点, 图中用圆圈表示.

对于旋转失速特性线与节流线的交点, 通过以下两个方程确定

$$\dot{\Phi} = -\Psi + \Psi_c(\Phi) - 3\Phi(1 - \Phi^2) \tag{11}$$

$$\dot{\Psi} = [\Phi - \Phi^3(\Psi)]/\beta^2 \tag{12}$$

因此, 在三阶模型中, 平衡点可以分为两类, 一类是轴对称的流动平衡点, 它通过公式(9)和(10)求解; 另一类是轴不对称的流动平衡点, 通过公式(11)和(12)求解.

2 分叉分析

2.1 平衡点的分叉分析

由图 1 所示, 当节流参数 $\gamma = \gamma_s$ 时, 节流线与稳态特性线有一个交点, 与旋转失速特性线相切, 因此轴不对称的平衡点也刚好只有一个. 当 $\gamma > \gamma_s$ 时, 可以看出, 节流线与旋转失速平衡点没有交点, 因而没有轴不对称的平衡点. 这时系统只有一个轴对称的流动平衡点. 将这个平衡点解分支记为 x_{01} . 当 $\gamma_s > \gamma > \gamma_c$ 时, 节流线与旋转失速特性线有两个交点, 分别记为两个解分支 x_{02} 和 x_{03} , x_{02} 对应流量系数较小的分支, x_{03} 对应流量系数较大的分支. 因此在 $\gamma = \gamma_s$ 处, 会发生鞍点分叉, 分叉之后, x_{02} 和 x_{03} 一个稳定, 另一个不稳定. 在 $\gamma = \gamma_c$ 处, 得到一个叉形分叉, 轴对称解分支 x_{01} 在这里失去稳定, 并且 x_{03} 分支在这里流量系数将大于 1, 因此得到 $R < 0$, 失去物理意义.

根据给定的压气机特性线和节流线方程, 可以计算出 $\gamma_c = 1.4712$, $\gamma_s = 1.9037$. 在这两个点上发生的分叉行为可以通过以下解析计算得到.

2.1.1 $\gamma = \gamma_s$ 处的鞍点分叉

系统方程为

$$\dot{\Phi} = -\Psi + 1.71875 + 1.5\Phi - 0.5\Phi^3 - 3\Phi(1 - \Phi^2)$$

$$\dot{\Psi} = (\Phi + 1 - \sqrt{\gamma} \sqrt{\Psi})/0.5625$$

把 $\sqrt{\gamma}$ 记为分叉参数 μ , 系统方程可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \text{ 则 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}$$

记

$$\mathbf{L} = D\mathbf{f}(\Phi_0, \Psi_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_1}{\partial \Psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_2}{\partial \Psi} \end{bmatrix}_{\Phi=\Phi_0, \Psi=\Psi_0}$$

$$L = \begin{bmatrix} 7.5\Phi^2 - 1.5 & -1 \\ 1.778 & -1.778 \frac{\Psi^{0.5}}{2} \Psi^{0.5} \end{bmatrix}$$

由 $\Phi_0 = 0.657\ 4$, $\Psi_0 = 1.443$, 得到

$$L = \begin{bmatrix} 1.741\ 3 & -1 \\ 1.778 & -1.021\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 且 } \det(L) = 0.$$

L 的特征值和特征向量分别为 $[0\ 720\ 2\ 0]^T$ 和 $\begin{bmatrix} 0.699\ 7 & 0.498\ 0 \\ 0.714\ 4 & 0.867\ 2 \end{bmatrix}$. 设 L 的零特征值所对应的左、右特征向量分别为 l 和 r , 满足 $Lr = 0, lL = 0$, 可令 $r = [0.498\ 0\ 0.867\ 2]^T$, $l = [-1.021\ 1\ 1\ 1]$. 如果系统满足以下条件

$$a = ID\psi(\Phi, \Psi) \neq 0$$

$$b = ID_x D_x f(\Phi, \Psi)(r, r) =$$

$$l \sum_{i=1}^n e^T \{ D_x [D_x f_i(\Phi, \Psi, \mu)]^T_{\Phi=\Phi_0, \Psi=\Psi_0, \mu=\mu_0} \} \cdot$$

$$r \neq 0$$

其中

$$D_x D_x f_i(x, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_i(x, \mu) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f_i(x, \mu) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f_i(x, \mu) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f_i(x, \mu) \end{bmatrix}$$

则在 $\mu = \mu_0$ 处存在鞍点分叉. 经过计算可以判定在 $\gamma = \gamma_s$ 处, 会发生鞍点分叉.

2.1.2 $\gamma = \gamma_c$ 处的叉形分叉

在轴对称分支 x_{01} 的特性线压升最高点上, 有 $R = 0$, $\psi_c(\Phi) = 0$, 此时 $\dot{R} = 0$. 把 $\sqrt{\gamma}$ 记为分叉参数 μ , 系统方程可以表示为 $\dot{x} = f(x, \mu)$, 则

$$x = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \\ R \end{bmatrix}$$

$$L = D_x f(\Phi, \Psi, 0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_1}{\partial \Psi} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_2}{\partial \Psi} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_3}{\partial \Psi} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}_{\Phi=\Phi_0, \Psi=\Psi_0, R=0}$$

由 $\Phi_0 = 1.0$, $\Psi_0 = 2.718\ 8$, 得

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1.778 & 0.653\ 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 且 } \det(L) = 0.$$

L 的零特征值所对应的左、右特征向量分别为 l 和 r , 满足 $Lr = 0, lL = 0$, 可令

$$r = [0\ 0\ 1]^T, l = [0\ 0\ 1].$$

如果系统满足以下条件:

$$a = ID\psi(\Phi, \Psi, R_0) = 0$$

$$b = ID_x D_x f(\Phi, \Psi)(r, r) =$$

$$l \sum_{i=1}^n e^T \{ D_x [D_x f_i(\Phi, \Psi, \mu)]^T_{\Phi=\Phi_0, \Psi=\Psi_0, \mu=\mu_0} \} \cdot$$

$$r \neq 0$$

其中

$$D_x D_x f_i(x, \mu) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_i(x, \mu) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f_i(x, \mu) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f_i(x, \mu) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f_i(x, \mu) \end{bmatrix}$$

$$c = ID_\psi D_x f(\Phi, \Psi, R_0)(r) \neq 0$$

其中

$$D_\psi D_x f(\Phi, \Psi, R_0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Phi \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial \Psi \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial R \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Phi \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial \Psi \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial R \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \Phi \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial \Psi \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial R \mu} \end{bmatrix}_{\Phi=\Phi_0, \Psi=\Psi_0, R=0, \mu=\mu_0}$$

则在 $\mu = \mu_0$ 处存在跨临界分叉. 经过计算可以判定, 在 $\gamma = \gamma_c$ 处, 存在叉形分叉.

2.2 失速延迟现象的分叉分析

图 2~ 图 5, 分别表示 $\beta = 0.75$ 时, 平衡点在 $\gamma-\Phi, \Phi-\Psi, \gamma-\Psi$ 和 $\gamma-R$ 相平面上的变化情况. 可以看到 3 个平衡点解分支 x_{01}, x_{02} 和 x_{03} 的稳定性变化情况, 图中用圆点表示不稳定部分, 圆圈表示稳定部分. $\gamma = \gamma_c$ 时, x_{01} 分支发生了稳定性变化, 左半部分不稳定, 右半部分稳定; 同时 x_{02} 分支在此

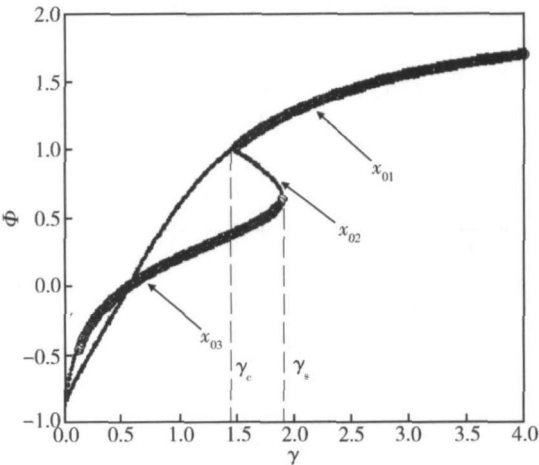


图 2 平衡点在 $\gamma-\Phi$ 相平面上的变化情况

Fig 2 Equilibrium variation in $\gamma-\Phi$ phase plane

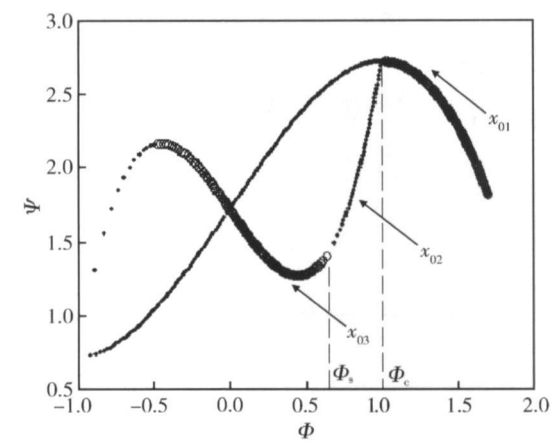


图 3 平衡点在 $\Phi-\Psi$ 相平面上的变化情况
Fig. 3 Equilibrium variation in $\Phi-\Psi$ phase plane

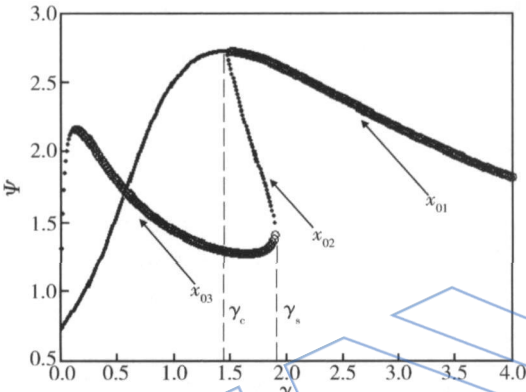


图 4 平衡点在 $\gamma-\Psi$ 相平面上的变化情况
Fig. 4 Equilibrium variation in $\gamma-\Psi$ phase plane

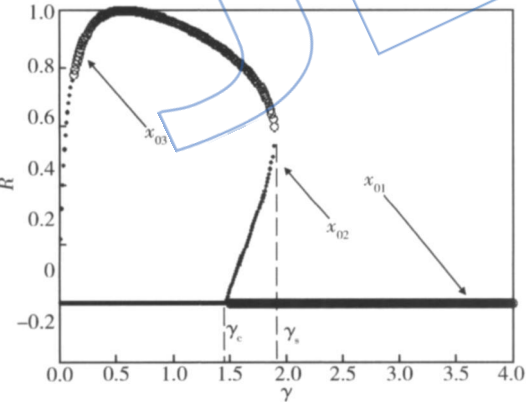


图 5 平衡点在 $\gamma-R$ 相平面上的变化情况
Fig. 5 Equilibrium variation in $\gamma-R$ phase plane

处流量系数大于 1 而失去物理意义(x_{02} 在流量系数大于 1 的部分没有绘出)。

同时,在 $\gamma=\gamma_s$ 处,由于鞍点分叉的存在, x_{02} 和 x_{03} 两个分支开始有解,并且呈现不同的稳定性。

从图 3 可以明显的看到旋转失速造成的失速迟滞循环(Hysteresis loop)。当压气机工作于 $\Phi=\Phi_c$ 时,取得了最大压升系数,而这个点同时也

是失速点(Stall point)。如果节流线受到扰动使其偏向失速点的左边时,由于 $\Phi_s\sim\Phi_c$ 之间一段曲线都是不稳定的,所以压气机稳定工作点将会从 $\Phi=\Phi_c$ 直接跳跃到 $\Phi=\Phi_s$ 。这种性能上的跳跃(Jump),不仅使压气机工作在远低于正常流量系数和压升系数之下,而且性能上的突变也对压气机安全、稳定工作十分不利。

当压气机工作在稳定的旋转失速平衡点 $\Phi=\Phi_s$ 时,如果想要退出失速,必须开大节流阀,使节流线与压气机稳态特性线交点的流量系数大于 Φ_s ,才有可能重新工作在稳态特性线上而退出旋转失速。这就是说,一旦旋转失速发生之后,如果要退出失速,必须使节流流量大于失速发生时的流量系数,这就是所谓的失速延迟现象。

2.3 平衡点解分支的分叉行为分析

2.3.1 轴对称解分支的分叉行为

轴对称解分支 x_{01} 在 $R=0$ 平面上, x_{01} 对于 $\gamma>\gamma_c$ 是稳定的,在 $\gamma=\gamma_c$, x_{01} 经历了叉形分叉变得不稳定,当 γ 继续减小,一旦系统 B 参数大于临界参数 B_σ 时,系统便经历了 Hopf 分叉。这与以前的以二阶模型为基础的分析结果相符合。我们可以把参数空间分为 $B<B_\sigma$ 和 $B>B_\sigma$ 两个部分,对于 $B>B_\sigma$ 的部分,对于某一个点 $\gamma=\gamma_h$,系统经历了一个 Hopf 分叉, Hopf 分叉产生了稳定的极限环,这种情况叫做“深度喘振”(Deep surge)。它对于 $\gamma<\gamma_h$ 的情况都存在。对于 $B<B_\sigma$ 的情况, x_{01} 不会出现 Hopf 分叉。这时轴对称解分支的分叉行为 $\gamma-B$ 相平面图如图 6 所示。

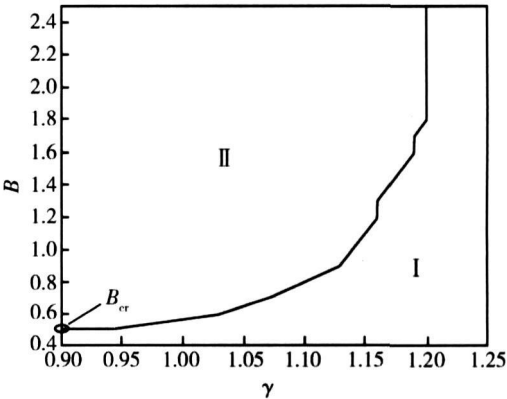


图 6 双分叉参数下系统行为 $\gamma-B$ 相平面图
Fig. 6 Double bifurcation parameters system status in $\gamma-B$ phase plane

2.3.2 轴不对称解分支的分叉行为分析

轴不对称解分支包含 x_{02} , x_{03} 。首先分析 x_{02}

的分叉集, 把 β 参数空间分为三个部分, $\beta < \beta_1$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$, $\beta_2 < \beta$ 对于 $\beta < \beta_1$, x_{02} 没有发生 Hopf 分叉, 旋转失速平衡点在 $\gamma = \gamma_s$ 处出现鞍点分叉 (Saddle bifurcation), 稳定的旋转失速解出现在 $0 < \gamma < \gamma_s$ 区间. 如图 7 所示. 对于 $\beta_1 < \beta < \beta_2$, 有一个节流参数值 $\gamma = \gamma_a$, 在该点 x_{02} 经历一个亚临界 Hopf 分叉而变得不稳定, 对应的平衡点处产生了不稳定极限环. 因此在 $0 < \gamma < \gamma_a$ 区间中, x_{02} 分支总是不稳定的. 如图 8 所示. 对于 $\beta_2 < \beta$, x_{02} 分支上有两个点产生了极限环, 分别记为 $\gamma = \gamma_a$ 和 $\gamma = \gamma_b$. 前者发生的是亚临界 Hopf 分叉, 对应的平衡点处产生了不稳定极限环; 后者发生的是超临界 Hopf 分叉, 对应的平衡点处产生了稳定极限环, 这个稳定的极限环是从旋转失速平衡点产生的, 叫做经典型喘振 (Classic surge). 如图 9 所示.

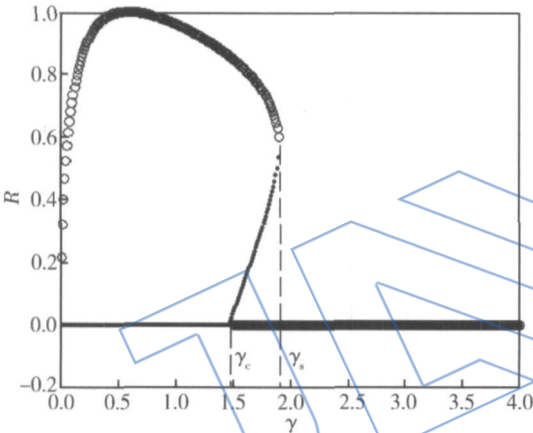


图 7 $\beta < \beta_1$ 时平衡点稳定性变化情况

Fig 7 Equilibrium stability variation when $\beta < \beta_1$

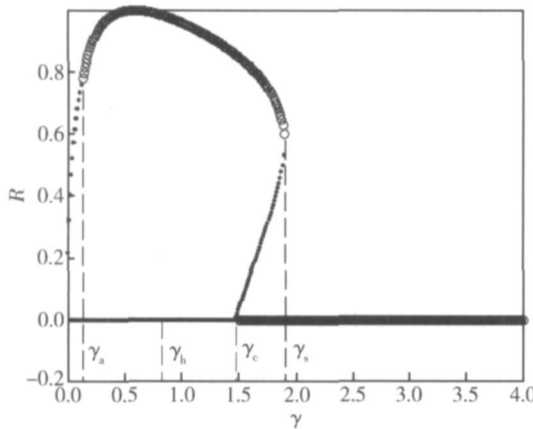


图 8 $\beta_1 < \beta < \beta_2$ 时平衡点稳定性变化情况

Fig 8 Equilibrium stability variation when $\beta_1 < \beta < \beta_2$

x_{03} 分支的情况在 $\gamma\beta$ 参数空间中, 系统平衡点始终不稳定, 所以可以不考虑它的变化情况.

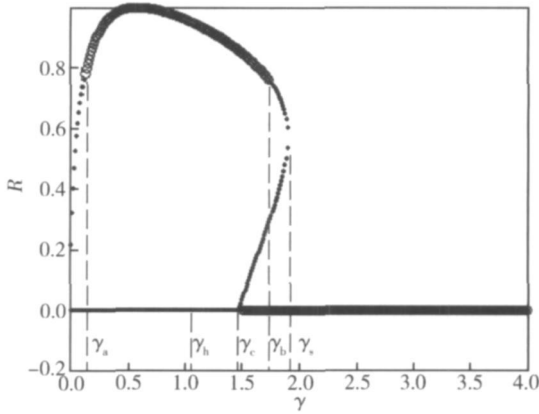


图 9 $\beta_2 < \beta$ 时平衡点稳定性变化情况

Fig 9 Equilibrium stability variation when $\beta_2 < \beta$

2 3 3 分叉参数空间中平衡点稳定性分析

结合以上轴对称流动和轴不对称的流动情况, 可以在 $\gamma\beta$ 参数空间中分析压缩系统的流动情况.

(1) $\beta < \beta_1$

$\gamma_s < \gamma$: 只有轴对称流动的稳定平衡点.

$\gamma_c < \gamma < \gamma_s$: 轴对称流动的平衡点和旋转失速流动的平衡点均稳定, 这导致了失速迟滞效应的产生.

$\gamma < \gamma_c$: 只有旋转失速的稳定平衡点.

(2) $\beta_1 < \beta < \beta_2$

$\gamma_s < \gamma$: 只有轴对称流动的平衡点稳定.

$\gamma_c < \gamma < \gamma_s$: 轴对称流动的平衡点和旋转失速流动平衡点均稳定.

$\gamma_h < \gamma < \gamma_c$: 只有旋转失速流动平衡点稳定.

$\gamma_a < \gamma < \gamma_h$: 稳定的旋转失速流动平衡点和轴对称流动的深度喘振 (Deep surge) 都有可能存在.

$0 < \gamma < \gamma_a$: 只能是轴对称流动的深度喘振.

(3) $\beta_2 < \beta$

$\gamma_s < \gamma$: 只有轴对称流动的平衡点稳定.

$\gamma_b < \gamma < \gamma_s$: 轴对称流动的稳定平衡点和轴不对称流动形成的经典型喘振 (Classic surge) 都有可能存在.

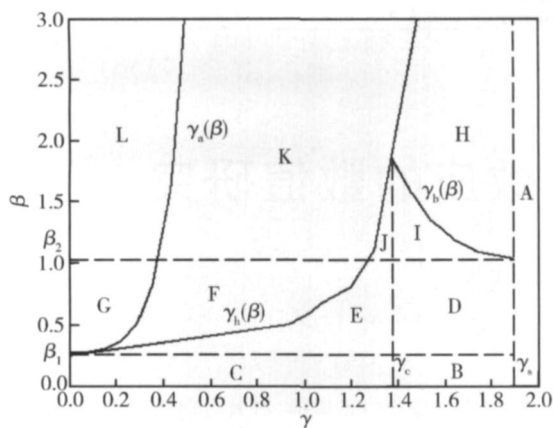
$\gamma_c < \gamma < \gamma_b$: 轴对称流动的稳定平衡点和旋转失速稳定的平衡点都有可能存在.

$\gamma_h < \gamma < \gamma_c$: 只有旋转失速流动平衡点稳定.

$\gamma_a < \gamma < \gamma_h$: 稳定的旋转失速流动平衡点和轴对称流动的深度喘振 (Deep surge) 都有可能存在.

$0 < \gamma < \gamma_a$: 只能是轴对称流动的深度喘振.

结合以上的分析结果, 可以在 $\gamma\beta$ 参数空间中绘制出压缩系统流动的状态图. 在图 10 中, 可以根据 $\gamma\beta$ 参数的变化, 判断压缩系统会处于何

图 10 $\gamma\beta$ 参数空间的压缩系统流动状态图Fig 10 Compressor flow status in $\gamma\beta$ parametric space

种流动状态. 根据流动行为的不同, 划分为 A~L 一共 12 个区域. 这些区域的流动状态如下:

- A: 稳定的轴对称流动;
- B: 稳定的轴对称流动和旋转失速均有可能;
- C: 旋转失速流动;
- D: 稳定的轴对称流动和旋转失速均有可能;
- E: 旋转失速流动;
- F: 旋转失速流动和深度喘振均有可能;
- G: 深度喘振;
- H: 稳定的轴对称流动和经典喘振均有可能;
- I: 稳定的轴对称流动和旋转失速均有可能;
- J: 旋转失速流动;
- K: 旋转失速流动和深度喘振均有可能;
- L: 深度喘振.

3 结 论

在三阶 MG 模型的基础上, 研究了压缩系统

方程中平衡点的静态分叉行为; 同时, 分析了在分叉参数作用下平衡点解分支的分叉稳定性情况, 以及由于分叉行为造成的失速延迟现象. 最后在 $\gamma\beta$ 分叉参数空间中, 按照系统典型过速行为的不同, 将稳定和不稳定流动划分为不同的区域, 在该图基础上, 可以根据分叉参数的情况, 对压缩系统的流动行为作简便的预测. 这种分析方法, 也是压缩系统分叉控制的基础.

参考文献:

- [1] Greitzer E M. Surge and rotating stall in axial flow compressors, Part I: Theoretical compression system model, Part II: Experimental results and comparison with theory [J]. ASME Journal of Engineering for Power, 1976, 98 (2): 625-636.
- [2] McCaughan F E. Application of bifurcation theory to axial flow compressor instability [J]. Journal of Turbomachinery, 1989, 111: 426-433.
- [3] Liaw D C, Abed E H. Control of compressor stall inception: a bifurcation theoretic approach [J]. Automatica, 1996, 32: 109-115.
- [4] Liaw D C, Abed E H. Nonlinear dynamics of axial flow compressor: a parameter study [R]. TR91-32, University of Maryland, 1991.
- [5] Agarwal A. Bifurcation analysis of axial compressor instability [R]. Indian Institute of Technology, 1998.
- [6] 陈策, 李军. 基于 B 参数的轴流压气机过速稳定性分析 [J]. 航空动力学报, 2004, 19(5): 678-683.
CHEN Ce, LI Jun. Stability analysis of axial flow compressor post stall transients based on parameter B [J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(5): 678-683.
- [7] 顾圣士. 微分方程和动力系统 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.
- [8] Moore F K, Greitzer E M. A theory of post stall transients in multistage axial compression system [R]. NASA CR-3878, 1985.